数理解析研究所講究録
49巻 1968年 84-100



# Topological $*$-algebra について

九大・理　富田稔

## §0 序

Topological $*$-algebra の理論は その構造論と表現論の二つに分ける事が出来よう. 構造論というのは代数的な構造を取扱うものであり、表現論は主として $C^*$-代数への連続$*$-準同型表現の性質を調べるものである. 前者の理論は 結局色々な代数的性質を仮定した topological $*$-algebra の相互関係を調べて 解析で取扱うのに適した条件を探しだすという問題になる. 後者は topological $*$-algebra 独得の理論として, 正値線型汎関数及び正値不変型式の理論を体系づける事である. このような理論が従来の作用素環で取扱いうる理論の限界を超えている事は Lie 群上の正定値測度 あるいは 正定値超関数で既約表現を誘導するものが存在する事からも容易に推察出来る.

## §1. Topological $*$-algebra の正則性と安定性

topological linear algebra とは 局所凸な位相をもつ線

型代数で，その乗法が Schwartz の意味で分離連続なものをいう．分離連続性のかわりに両側連続性を仮定してもあまり利益がない事は次の例からわかる．

例 1.1. 複素係数の形式的 Laurent 級数体 $L(x)$ は両側連続な乗法をもつ Montel division algebra である．

[illegible])

topological linear algebra $\mathfrak{A}$ が正則であるというのはその quasi-regular な要素全体 $\mathfrak{A}^q$ が開集合であり，その中の有界集合上で quasi-inverse $x \to x^q$ が連続なものをいう．
正則な topological algebra については次の定理が成立する．

定理 1.1　$\mathfrak{A}$ が正則な topological linear algebra ならば，次の性質をもつ連続な pseudo-norm $r$ が存在する．任意の連続な，$\mathfrak{A}$ 上の pseudo-norm $p$ に対して $\overline{\lim}\, p(x^n)^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$.

定理 1.1 のような pseudo-norm $r$ を $\mathfrak{A}$ の principal pseudo-norm という．

定理 1.2.　正則な複素 topological division algebra は複素数体に同型．

<u>定理 1.3.</u> $\mathfrak{A}$は quasi-complete algebra 又はそのような algebras の inductive limit であるとする。もし$\mathfrak{A}$が principal pseudo-norm をもてば、$\mathfrak{A}$は正則である。

定理 1.1 の略証： $\mathfrak{A}$のある連続な pseudo-norm $r$ をとって $\mathfrak{A}^{\delta}$ が集合 $S(r(x)<1)$ を含むようにする。今 $x\in\mathfrak{A}$ を固定すれば $\lambda \longrightarrow x(x-\lambda)^{-1}$ は $|\lambda| > r(x)$ において連続なだけでなく strongly analytic である。実際それは

$$x(x-\lambda)^{-1} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k} x^{k} - \lambda^{-n-1} x^{n+1} (1-\lambda^{-1}x)^{-1}$$

と展開できるからである。上の展開に対して留数定理を利用すれば $\delta > r(x)$ に対して

$$x^{n} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\delta} \lambda^{n-1} x(x-\lambda)^{-1} d\lambda$$

とあらわされる事が分る。両辺は弱積分として一致するが右辺の積分は強積分として Cauchy filter なので強積分として $x^{n}$ に一致するはずである。（$|\lambda|=\delta$ 上では $\lambda^{n-1}x(x-\lambda)^{-1}$ は一様連続な事に注意）これから任意の連続な pseudo-norm $p$ に対して $p(x^{n}) \leqq C\delta^{n-1}$ となる $n$ に無関係な定数 $C$ がとれ、$\overline{\lim}\, p(x^{n})^{\frac{1}{n}} \leqq \delta$. 従って $\overline{\lim}\, p(x^{n})^{\frac{1}{n}} \leqq r(x)$ が得られる。

定理 1.2 は殆ど明らかである。

<u>定理1.3.</u>の略証： 今$\mathfrak{A}$は principal pseudo-norm $r$ をもつと仮定すれば，$r(x)<1$ をみたす要素$x$は quasi-inverse $x^q = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ をもつ．この右辺の収束は任意の連続な pseudo-norm $p$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} p(x^n) < \infty$ である事から $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ が$\mathfrak{A}$における Cauchy 列になる事がわかる．

連続な involution をもつ complex topological linear algebra を topological $*$-algebra という．topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$ からある $C^*$-algebra の中への連続$*$-準同型写像$\varphi$を単に$\mathfrak{A}$の表現という．今$\mathfrak{B}$を$\mathfrak{A}$の closed $*$-subalgebra とすれば上の$\varphi$は$\mathfrak{B}$の表現$\varphi_{\mathfrak{B}}$を定義する．これを$\varphi$の部分表現という．topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$が安定であるというのは$\mathfrak{A}$の任意の closed $*$-subalgebra の表現が必ず$\mathfrak{A}$のある表現の部分表現になっている事である．

<u>定理1.4.</u> 安定な topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$ が division algebra であれば，これは複素数体に同型である．

証明： Division algebra であれば単位元 $e$ が必ず$\mathfrak{A}$の中に存在する．$e^*$も単位元だから $e=e^*$ を得る．よって安定という仮定から閉部分$*$-代数 $\{\lambda e\}$ の表現 $\lambda e \to \lambda$ は $\mathfrak{A}$ の上の non-trivial な表現に拡張されるはずであり

$\mathfrak{A}$ は $C^*$-代数の部分代数と代数的に同型になるはずである．これが division algebra になるのは複素数体に同型なときだけである．

安定で正則な Frechet $*$-algebra 又はそのような algebra の inductive limit としてあらわされる algebra を spectral algebra という．topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ の要素 $a$ の spectrum を $S(a)$ であらわす．topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の spectral representation とは $\mathfrak{A}$ のある representation $\sigma$ で，$S(a) \subset S(\sigma(a)) \cup \{0\}$ が成立するようなものである．ただし $S(\sigma(a))$ は $C^*$-algebra の中で考える．$\mathfrak{A}$ 上の pseudo-norm $r$ で $r(ab) \leq r(a)r(b)$，$r(a^*a) = r(a)^2$ をみたすものを $\mathfrak{A}$ の $C^*$-pseudo-norm という．

定理 1.5. topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$ が ~~quasi complete~~ F型 algebra 又は LF型 algebra 又はそのような algebra の inductive limit であるとき次の三条件は同等である．

(a) $\mathfrak{A}$ は安定で正則である．

(b) $\mathfrak{A}$ は正則で，spectral representation をもつ．

(c) $\mathfrak{A}$ は principal $C^*$-pseudo-norm をもつ．

証明：(b) ⇒ (c) ⇒ (a) ⇒ (b) の順に証明する．

(b) ⇒ (c)：$\mathfrak{A}$ の spectral representation を $\sigma$ とし，$r(a) = \|\sigma(a)\|$ とおけば，$r$ が principal $C^*$-pseudo-norm である．実際それには定理 1.1 の証明によって $r(a)<1$ ならば，$a$ が quasi-regular な事をを確めればよいが，それは $\sigma(a)$ が quasi-regular な事から直ちに出る．

(c) ⇒ (a)：$\mathfrak{A}$ は principal $C^*$-pseudo-norm $r$ をもつと仮定する．定理 1.3 により $\mathfrak{A}$ は正則になるから安定性をを示せばよい．もし $\varphi$ が $\mathfrak{A}$ の表現であれば $\|\varphi(a)\|$ は $\mathfrak{A}$ の連続な pseudo-norm だから $\overline{\lim}\,\|\varphi(a^n)\|^{\frac{1}{n}} \leqq r(a)$ である．特に $a=a^*$ の場合は $\|\varphi(a)\| \leqq r(a)$ となる．ところが一般の $a$ に対しても $\|\varphi(a)\| \leqq r(a)$ が成立する事は $\|\varphi(a^*a)\| = \|\varphi(a)\|^2$，$r(a^*a) = r(a)^2$ よりわかる．$r$ は $C^*$-pseudo-norm だから $\mathfrak{A}$ のある $C^*$-代数 $\mathfrak{A}_0$ の中への表現を定義する．今 $\mathfrak{A}$ の部分 *-代数 $\mathfrak{B}$ の表現を $\varphi$ とすれば $\|\varphi(a)\| \leqq r(a)$ が $a \in \mathfrak{B}$ に対して成立するから，$\varphi$ は $\mathfrak{A}_0$ のある閉部分 *-代数 $\mathfrak{B}_0$ の表現から導かれるものであり，$\mathfrak{B}_0$ の表現は $\mathfrak{A}_0$ の表現に拡大されるから，$\varphi$ は $\mathfrak{A}$ の表現に拡大される．

(a) ⇒ (b)：$\mathfrak{A}$ の principal pseudo-norm を $r$ とする．$\mathfrak{A}$ の任意の表現を $\varphi$ とすれば，$\overline{\lim}\,\|\varphi(a^n)\|^{\frac{1}{n}} \leqq r(a)$ が成立する．特に $a=a^*$ のときは $\|\varphi(a)\| \leqq r(a)$ であり，従って

任意の $a$ に対しては $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*a)\| \leqq r(a^*a)$ が成立する．今 $\mathfrak{A}$ の各表現 $\varphi$ に対して pseudo-norm $\|\varphi(a)\|$ を考え，このような pseudo-norm 全体の上限を $s$ とすれば $s(a) \leqq \max(r(a), r(a^*))$ であり，連続な $C^*$-pseudo-norm となる．$s$ によって定義される $\mathfrak{A}$ の表現 $\sigma$ が $\mathfrak{A}$ の spectral representation である事を示そう．今 $\sigma$ は $\mathfrak{A}$ をある $C^*$-代数 $\mathfrak{A}_0$ の中に写すとする．

(1) まず $\mathfrak{A}$ の要素 $a$ で，$a = a^*$ をみたすものに対し $S(a) \subset S(\sigma(a)) \cup \{0\}$ を示す．$a$ を含む $\mathfrak{A}$ の最小の閉部分 $*$-代数を $\mathfrak{B}$ とすれば，$\mathfrak{B}$ は abelian である．今 $\lambda$ を $S(a)$ の $0$ でない要素とすれば，$\mathfrak{B}(x-\lambda)$ は $\mathfrak{B}$ の proper な modular ideal であり，$\mathfrak{B}$ の maximal modular ideal $\mathfrak{M}$ に拡張される．$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{B}$ の closed subalgebra であって，ある，$\mathfrak{B}$ から複素数体への連続準同型写像 $\varphi$ を定義する．そこで $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^*)}$ $(x \in \mathfrak{B})$ と定義すれば，$\varphi^*$ も $\mathfrak{B}$ 上で連続な準同型写像である．まず $\varphi = \varphi^*$ となる事を示そう．今 $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ をみたす $x \in \mathfrak{B}$ 全体を $\mathfrak{B}_0$ とすれば，$\mathfrak{B}_0$ は $\mathfrak{B}$ の closed $*$-subalgebra であり，$\varphi$ を $\mathfrak{B}_0$ へ制限したもの $\varphi_0$ は $*$-準同型になっている．従って $\varphi_0$ はある $\mathfrak{B}$ の表現 $\psi$ に拡張される．この事から，もし $x \in \mathfrak{B}$ に対して $x^*x \in \mathfrak{B}_0$ ならば $\varphi(x^*x) = \psi(x^*x) = \psi(x)^*\psi(x) \geqq 0$ でなければならない．

また，今 $x$ を $\mathfrak{A}$ の任意の要素とすれば，$x = x_1 + x_2$，$x_1 \in \mathfrak{B}_0$，$\varphi(x_2) = -\varphi^*(x_2)$ をみたすように分解する事が出来る．このとき $\varphi(x_2^* x_2) = -|\varphi(x_2)|^2 \leqq 0$ であるから $\varphi(x_2) = 0$ 及び $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ を得る．従って特に $\varphi(a) = \varphi^*(a)$ より $\lambda = \bar{\lambda}$．故に $S(a)$ は実軸に含まれている．次に上の事から $\varphi$ は $\mathfrak{B}$ 上の表現である事が分ったので $\varphi$ は $\mathfrak{A}$ の表現にまで拡張される事がわかる．従って $|\varphi(x)| \leqq \nu(x)$ および $|\varphi(x)| \leqq \|\sigma(x)\|$ が $x \in \mathfrak{B}$ に対して成立することがわかる．$\sigma(x) \to \varphi(x)$ は $\sigma(a)$ を含む $\mathfrak{A}_0$ の最小の閉 $C^*$-代数の上への連続準同型表現に拡張されるから，$\varphi(a)$ は $S(\sigma(a))$ に属す．よって $S(a) \subset S(\sigma(a)) \cup \{0\}$．

(2). 次に $a$ を $\mathfrak{A}$ の一般の要素とし，$|\lambda| > \nu(a)$ ならば $\lambda \notin S(a)$ である事を示そう．一般に $|\lambda| > \nu(a) = \|\sigma(a)\|$ より $(\lambda - \sigma(a))^{-1}$ が存在し，従って $(\lambda - \sigma(a))^*(\lambda - \sigma(a))$ は invertible である．

この事は $|\lambda|^2$ が $\sigma(\lambda a^* + \bar{\lambda} a - a^* a)$ の spectrum に属さぬ事を示し，従って $|\lambda|^2$ は $\lambda a^* + \bar{\lambda} a - a^* a$ の spectrum に属していない．故に $\{(\bar{\lambda} - a^*)(\lambda - a)\}^{-1}$ は存在する．同様に $\{(\lambda - a)(\bar{\lambda} - a^*)\}^{-1}$ は $\mathfrak{A} \cup C$ の中に存在している．これから $(\lambda - a)^{-1}$ の存在は $(\lambda - a)(\bar{\lambda} - a^*)\{(\lambda - a)(\lambda - a)^*\}^{-1} = \{(\lambda - a)^*(\lambda - a)\}^{-1} \times (\lambda - a)^*(\lambda - a) = 1$ によって証明される．故に $\lambda \in S(a)$ ならば $|\lambda| \leqq \|\sigma(a)\|$ でなければならない．

今 $0 \neq \lambda \in S(a)$ ならば $\lambda \in S(\sigma(a))$ である事を示そう．

もしそうでなければ $(\lambda - \sigma(a))^{-1}$ が存在する. $(\lambda-\sigma(a))^{-1} = \lambda^{-1} - b$ とする. $b$ は $\mathfrak{A}_0$ の要素である. このとき $\| b - \sigma(c) \| < \delta$ をみたす $\mathfrak{A}_0$ の要素 $c$ をとって

$$\| (\lambda - \sigma(a))(\lambda^{-1} - \sigma(c)) - 1 \| < 1$$

$$\| (\lambda^{-1} - \sigma(c))(\lambda - \sigma(a)) - 1 \| < 1$$

が成立するようにする. $\delta = (|\lambda| + \|\sigma(a)\|)^{-1}$ とすればよい. $|\lambda| \leqq \|\sigma(a)\|$ より $\|\sigma(a)\| < 1$ ならば, $a$ は quasi-invertible であり, 従って

$$((\lambda - a)(\lambda^{-1} - c))^{-1} = 1 - c_1$$

$$((\lambda^{-1} - c)(\lambda - a))^{-1} = 1 - c_2$$

をみたす $c_1, c_2$ がとれるから, 結局 $(\lambda - a)$ は $\mathfrak{A}^{\cup} C$ で invertible 従って $\lambda \notin S(a)$ になる. 故に $S(a) \subset S(\sigma(a)) \cup \{0\}$ は一般に正しい.

## §2. Spectral algebra と表現可能性.

topological $*$-algebra $\mathfrak{A}$ 上の線型汎関数 $p$ で $p(x^*x) \geqq 0$ をみたすものを $\mathfrak{A}$ の正値汎関数という. また $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ 上の関数 $\varphi(x, y)$ で, $x$ につき線型, $y$ につき共役線型で次の二条件をみたすものを $\mathfrak{A}$ の正値不変式という.

2.1. $\varphi(xy, z) = \varphi(y, x^*z)$

2.2. $\varphi(x,x) \geqq 0$

もし $p$ が $\mathfrak{A}$ 上の正値汎関数ならば，それから正値不変式 $p^0$ が次のように誘導される．

2.3 $p^0(x,y) = p(y^*x)$

正値不変式 $\varphi$ に対して次の性質をもつある Hibert 空間 $L^2(\varphi)$ とその上への線型写像 $\lambda$ が定義される．

2.4 $\varphi(x,y) = (\lambda(x), \lambda(y))$

ただし $x \to \lambda(x)$ の値域は $L^2(\varphi)$ の中で稠密である．正値不変式 $\varphi$ は次の条件をみたすとき 代数的に表現可能であるという．$\mathfrak{A}$ から ある，$L^2(\varphi)$ の上の $*$- 代数への代数的 $*$-準同型写像 $\sigma$ があって

2.5 $\lambda(xy) = \sigma(x)\lambda(y)$

をみたしている．

$\lambda$，$\sigma$ 共に連続なとき，$\varphi$ は表現可能な正値不変型式という．

<u>補助定理 2.1</u> $\mathfrak{A}$ が Banel 空間（特に Montel 空間あるいは Frechet 空間の inductive limit）ならば，$\mathfrak{A}$ 上の代数的に表現可能な連続正値不変型式 $\varphi$ は表現可能になる．

証明： Banel 空間とでは下半連続な pseudo-norm は連続になる．よって $\varphi$ が $\mathfrak{A}$ 上で連続な事から

$$\|\sigma(a)\|^2 = \inf_{\varphi(x,x)\leqq 1} \varphi(ax, ax)$$

従って $\|\sigma(a)\|$ は $\mathfrak{A}$ 上で下半連続であり，連続でなければならない．

連続な正値不変型式 $\varphi$ は 次の条件をみたすとき 近似的に表現可能であるという： $\varphi$ は $\varphi \geqq \psi \geqq 0$ をみたす代数的に表現可能な正値不変型式全体の弱閉包に含まれる．
又，連続な正値不変型式 $\varphi$ で，$\varphi \geqq \psi \geqq 0$ をみたす代数的に表現可能な正値不変型式 $\psi$ が $\psi = 0$ 以外に存在しないとき，厳密に表現不能な正値型式という．

<u>定理 2.1.</u> 近似的に表現可能な正値不変型式の和は近似的に表現可能である．厳密に表現不能な正値型式の和は厳密に表現不能である．

<u>定理 2.2.</u> 任意の連続な正値不変型式は厳密に表現不能なものと近似的に表現可能なものの和としてあらわされる．このような分解は一意である．

例 2.1 有理関数体に所謂極大局所凸位相を入れたもの $R(x)$ は Montel $*$-algebra である．これは任意の $f \neq 0$ に対して $p(f^*f) > 0$ をみたす正値汎関数 $p$ をもつ．しかし $R(x)$ 上の

正値型式は全く厳密に表現不能である.

位相$*$-代数$\mathfrak{A}$は その上の連続な正値不変型式がすべて表現可能なとき, 表現可能であるといい, またその上の連続不変型式がすべて近似的に表現可能なとき, 近似的に表現可能であるという. 表現可能性は正則性, あるいは安定性と異って閉$*$-部分代数をとるとき, その性質が保持されない.

例 2.2 実数空間$R$上の compact carrier をもつ無限回微分可能関数の空間 $\mathcal{D}(R)$ を群環と考えたとき, これは表現可能だが, $\mathcal{D}(R)$ の中の偶関数全体 $\mathcal{D}_E(R)$ は表現可能でない. (Gelfand [1])

例 2.3. 例 1.1 の Laurent 級数体 $L(x)$ は表現可能な Montel $*$-algebra である. その上の正値不変型式は $0$ 以外に存在しないからである.

局所 compact 群$G$, あるいは Lie 群 $G$ に対して積分可能な関数の作る群環 $L(G)$, compact carrier をもつ連続関数全体の群環 $C_0(G)$, 及び compact carrier をもつ無限回微分可能関数の群環 $\mathcal{D}(G)$ を作れば,

<u>定理 2.3.</u> $L(G)$, $C_0(G)$, $\mathcal{D}(G)$ などは表現可能である. もし $G$ が non-compact で連結ならば $C_0(G)$, $\mathcal{D}(G)$ は正則でない.

$C_0(G)$, $\mathcal{D}(G)$ の不正則性は次のように示される．今例えば $\mathcal{D}(G)$ の $f(e)=1$ をみたす負にならない要素 $f$ をとる．もし $\mathcal{D}(G)$ が正則なものとすれば，ある principal pseudo-norm $r$ があって $\overline{\lim}\, p(f^n)^{\frac{1}{n}} \leqq r(f)$．従って ある正数 $\varepsilon < r(f)^{-1}$ に対して $p((\varepsilon f)^n) \to 0$ がすべての連続 pseudo-norm $p$ に対して成立し，$(\varepsilon f)^n \to 0$ にならねばならぬ．これから $(\varepsilon f)^n$ は有界なはずだが $f$ の carrier を $U$ とすれば $f^n$ の carrier は $U^n$．従って $\varepsilon^n f^n$ の carrier は $G$ に近づき $(\varepsilon f)^n \to 0$ ではない．これは矛盾である．

<u>定理 2.4.</u> spectral algebra $\mathfrak{A}$ は表現可能である．

証明：まず次の補助定理に注意する．

<u>補助定理 2.2.</u> quasi complete な線型位相代数 $\mathfrak{A}$ の要素 $a$ に対して，$f(z)$ を $a$ の spectrum $S(a)$ を含むある開集合 $\mathcal{D}$ 上の解析関数とする．ただし，もし $0 \in S(a)$ ならば $f(0)=0$ であるとする．このとき 強積分

$$f(a) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\lambda^{-1} a (a-\lambda)^{-1} d\lambda$$

によって定義される $f(a)$ は必ず存在する．ただし $\Gamma$ は $\mathcal{D}$ に含まれ，その内部が $S(a)$ を含むような長さのある閉曲線で

ある．$f \to f(a)$ は準同型であり，もし $\mathfrak{A}$ が位相*代数であって $a = a^*$ をみたせば，$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ と定義する事により，$f \to f(a)$ は *-homomorphism である．

補助定理 2.3. $\mathfrak{A}$ が quasi complete な位相*-代数 又はその inductive limit であるとし，$a$ を $\mathfrak{A}$ の任意の要素とする．$\mathfrak{A}$ の principal $C^*$ pseudo-norm を $s$ とすれば，任意の $\delta > s(a)$ をみたす $\delta$ に対して，$\mathfrak{A}$ の Hermitean element $b$ で

$$-2\delta b + b^2 = -a^*a$$

をみたす $b$ の存在がとれる．

証明：$f(z) = \delta - (\delta^2 - z)^{\frac{1}{2}}$ は $Re\, z < \delta^2$ の範囲で一価正則で，$f(0) = 0$ をみたす．それは $S(a^*a)$ を内部に含むから $f(a^*a) = b$ をみたす Hermitean $b$ が存在する．

定理 2.4 の証明！ $\mathfrak{A}$ の正値不変形式（必しも連続でない）$\varphi$ をとって，これに対する $\mathfrak{A}$ の $L^2(\varphi)$ への写像 $\lambda$ を考える．今 $a, b \in \mathfrak{A}$ 及び $\delta > s(a)$ に対して $-2\delta c + c^2 = -a^*a$ をみたす Hermitean $c$ をとる．

$$\delta^2 \varphi(b, b) - \varphi(ab, ab) = \varphi((\delta^2 - a^*a)b, b)$$
$$= \varphi((\delta - c)^2 b, b) = \varphi((\delta - c)b, (\delta - c)b) \geq 0$$

が必ず成立するから

$$s(a)^2\varphi(b,b) \geqq \varphi(ab,ab)$$

従って $\lambda(ab)=\sigma(a)\lambda(b)$ をみたす operator $\sigma(a)$ で $\|\sigma(a)\|\leqq s(a)$ をみたすものが必ず存在する. もし $\varphi$ が $\mathfrak{A}$ 上で連続ならば $\sigma, \lambda$ 共に連続だから $\varphi$ は $\mathfrak{A}$ で表現可能である.

以上の議論では $\mathfrak{A}$ は単に quasi complete (又はもっと弱く sequentially complete) な topological $*$-algebra 又はその inductive limit にきまっていればよい.

一般に表現可能で正則でも安定ではないし, 安定で表現可能でも正則にはならぬ. また安定でも表現可能でない例が存在する. 多分大きな興味のある問題は 安定な位相 $*$-代数は近似的に表現可能ではないかという予想である. これについては未だ解決していない.

§3. 位相 $*$- 代数の例.

例 3.1 多様体 $\Omega$ 上の compact carrier をもつ無限回微分可能な関数全体 $\mathcal{D}(\Omega)$ は関数環として spectral algebra である.

例 3.2. $R^n$ 上の急減少関数全体の環 $S(R^n)$ も spectral algebra である.

例 3.3 $\Omega$ を Riemannian manifold, $m(x)$ を $\Omega$ の volume element とするとき $\mathcal{D}(\Omega\times\Omega)$ は 積分作用素としての演算

$$f^*(x,y) = \overline{f(y,x)}, \quad f\circ g(x,y) = \int f(x,z)g(z,y)\,dm(z)$$

によって spectral algebra になる.

例 3.4 急減少関数による積分作用素環 $S(R^n\times R^n)$ もまた spectral algebra である.

~~例3.~~ 3.4 はある種の nilpotent Lie group の急減少関数の群環が spectral algebra である事を証明するのに役立つ.

例 3.5. 形式的巾級数環 $P_F(x)$ は spectral algebra である.

例 3.6 実数空間 $R$ 上の連続関数全体 $C_0'(R)$ は安定で表現可能な Frechet $*$-algebra であるが 正則ではない.

例 3.7 $R$ 上の緩増加連続関数全体 $C_s'(R)$ は安定で近似的に表現可能だが 表現可能ではない.

例 3.8 表現可能で正則である Banach $*$-algebra としては単位円板の disk algebra をあげる事が出来よう. これは安定ではない.

100

局所 compact 群 $G$ の群環 $L(G)$ が安定か否かは極めて重要な問題である. $G$ の既約表現として unitary 表現だけで間にあうか否かという問題は結局この点に帰着すると考えられる. Lorentz 群の表現から見ると $L(G)$ が安定でない事は確実だと思うが未だ計算は行っていない.